**Tanım. Alt Dizi** $\mathbb{R}$ de $(a_n)$ dizisi verilsin. $(n_k)$, $\mathbb{N}$ de $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ koşulunu sağlayan bir dizi olmak üzere $(a_{n_k})$ dizisine $(a_n)$ dizisinin bir <u>alt dizisi</u> denir.

$(2k)$ ve $\left(\frac{1}{2k-1}\right)$ dizileri $\left(n^{(-1)^n}\right)$ dizisinin alt dizileridir.

<u>Sembol</u>: $x_n \sim t.y_n \;:\Leftrightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = t$ ,

$x_n = O(y_n) \Leftrightarrow$ yeterince büyük $n$ ve $n$ den bağımsız $K$ için $|x_n| < K.|y_n|$ (büyük O)

$x_n = o(y_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ (küçük o)

**Teorem 3.1.3.** Yakınsak her dizi sınırlıdır. (Dizi sınırlı değil ise ıraksaktır)

İspat: $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ olsun. $\varepsilon = 1$ sayısına karşılık $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ : $\forall n > n_0$ için $|a_n - a| < 1$ dir.

$n > n_0$ için $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ olur.

$M := \text{maks}\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, 1+|a|\}$ dersek $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| < M$ yani $(a_n)$ sınırlı olur.

<u>Not:</u> Bir dizi sınırlı ise yakınsak olması gerekmez.

$a_n = (-1)^n$, $(a_n)$ sınırlıdır fakat yakınsak değildir.

---

<u>**Teorem 3.1.1.**</u> $(a_n)$ dizisi yakınsak ise limiti tektir.

<u>İspat:</u> $(a_n)$ dizisi $a$ ve $b$ gibi farklı iki sayıya yakınsasın.

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ : $\forall n > n_1$ için $|a_n - a| < \varepsilon/2$ ve

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ : $\forall n > n_2$ için $|a_n - b| < \varepsilon/2$ dir.

$n_0 = \text{maks}\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n > n_0$ için

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için $|a - b| < \varepsilon$ olduğundan $|a-b| = 0 \Rightarrow a = b$ dir.

**Teorem 3.1.2.** Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ dir.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ dir.

<u>İspat:</u> (Alıştırma olarak öğrenciye bırakıldı)

**Teorem 3.1.4.** $(a_n)$ dizisi bir $a$ reel sayısına yakınsıyor ise bunun her $(a_{n_k})$ alt dizisi de $a$ sayısına yakınsar.

**İspat:** $a_n \to a \ (n \to \infty)$ olduğundan $n > n_0$ için $(a_n)$ dizisinin sonsuz sayıdaki terimleri $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığındadır. $(a_{n_k})$ terimleri $(a_n)$ ler arasından alındığına göre ancak sonlu sayıdaki $a_{n_k}$ terimleri bu aralığın dışında kalır. Başka bir deyişle sonsuz sayıdaki $a_{n_k}$ terimleri de $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığı içindedir. O halde $(a_{n_k})$ alt dizisi de $a$ sayısına yakınsar.

**Sonuç:** 1) Eğer $(a_n)$ dizisinin iki alt dizisi farklı sayılara yakınsıyorsa $(a_n)$ dizisi ıraksaktır.
(2) $(a_n)$ dizisinin ıraksak bir alt dizisi varsa, $(a_n)$ dizisi de ıraksaktır.

## 3.2. Dizilerle İşlemler ve Stolz Teoremi

Verilen dizinin yakınsak olup olmadığı karşılaşılan önemli problemlerden biridir. Eğer dizinin yakınsak olduğu biliniyorsa farklı teknikler kullanılarak limit hesaplanabilir.

**Teorem 3.2.1.** $\mathbb{R}$ de verilen $(a_n)$, $(b_n)$ dizileri yakınsak ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ olsun. O zaman

1) $(a_n \mp b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ dizileri de yakınsaktır ve
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$ dir.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ve $b \neq 0$ ise

(a) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ için $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ dir.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ ise $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ dizisi yakınsaktır ve
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ dir.

(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \neq 0$ ise $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ dizisi yakınsaktır ve

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ dir.

İspat: 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ için $\forall n > n_1$ iken $|a_n - a| < \varepsilon/2$ ve $\forall n > n_2$ iken $|b_n - b| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. $N = \text{maks}\{n_1, n_2\}$ dersek,
$\forall n > N \Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
bulunur. O halde $(a_n + b_n)$ yakınsak olup, limiti $a+b$ dir.

$(a_n)$ yakınsak olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.
$a_n \to a$ ve $b_n \to b$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için
$n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|b| + M}$, $n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|b| + M}$
olacak biçimde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır.
$N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ denirse, $\forall n > N$ olduğunda

$$\begin{aligned}
|a_n . b_n - a.b| &= |a_n . b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n (b_n - b) + b(a_n - a)| \\
&\leq |a_n| . |b_n - b| + |b| . |a_n - a| \\
&< M . \frac{\varepsilon}{|b| + M} + |b| . \frac{\varepsilon}{|b| + M} = \left(\frac{M + |b|}{M + |b|}\right) . \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(a_n b_n)$ yakınsaktır ve limiti $a.b$ dir.

---

2) a) $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ olduğundan özellikle $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ için
$n > N \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır.
$||b_n| - |b|| \leq |b_n - b| \Leftrightarrow -|b_n - b| \leq |b_n| - |b| \leq \underbrace{|b_n - b| < \frac{|b|}{2}}$
olduğu gözönüne alınırsa
$-\frac{|b|}{2} < -|b_n - b| \leq |b_n| - |b| \Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$ olur.

b) $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için
$n > N_1 \Rightarrow |b_n| > \frac{|b|}{2}$ ve $n > N_1 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2} . |b|^2 . \varepsilon$
olacak şekilde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. $N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ denirse her $n > N$ iken

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| . |b|} < \frac{\frac{1}{2} . |b|^2 . \varepsilon}{|b|} . \frac{2}{|b|} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

c) $\frac{a_n}{b_n} = a_n . \frac{1}{b_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a . \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

**Teorem 3.2.2.** a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ve $n > N$ için $a_n \le b_n$ ise $a \le b$ dir.

(b) **Sıkıştırma Teoremi:** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ ve $n > N$ için $a_n \le c_n \le b_n$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ dır.

**İspat.** a) Aksi halde $a > b$ olsun. $b < c < a$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ yi alalım. $c - b > 0$ ve $a - c > 0$ dır.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1$ için $|a_n - a| < a - c \Leftrightarrow$

$\forall n > N_1$ için $a - (a-c) < a_n < a + a - c \Rightarrow$

$\forall n > N_1$ için $\underline{c < a_n} < 2a - c$ dır.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2$ için $|b_n - b| < c - b$ dır.

$n > N_2$ için $b - (c-b) < b_n < b + c - b$

$n > N_2$ için $2b - c < \underline{b_n < c}$ olur.

$N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ dersek her $n > N$ için

$b_n < c < a_n \Rightarrow \forall n > N$ iken $b_n < a_n$ bulunur ki bu ise $a_n \le b_n$ ile çelişir. O halde kabul yanlış yani $a \le b$ dir.

---

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1$ için $|a_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2$ için $|b_n - a| < \varepsilon$

$N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ dersek $\forall n > N$ için

$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon \Rightarrow \forall n > N$ için $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$

olur ki $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ demektir.

**Teorem 3.2.3.** $(a_n), (b_n)$ iki reel sayı dizisi ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) olsun. O zaman

(a) Eğer $(b_n)$ alttan sınırlı ise ($(b_n)$ üstten sınırlı)

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty$)

(b) $\alpha > 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = -\infty$

(c) Eğer $M > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > M$ ise

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$)

(d) Eğer $(b_n)$ sınırlı ve $a_n \ne 0$ ise

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ dır.

İspat. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olsun. (Benzer şekilde $-\infty$ olma durumu yapılır.)

a) Hipoteze göre $(b_n)$ alttan sınırlı olduğundan $b_n \geq M_0$ olacak şekilde $M_0 \in \mathbb{R}$ vardır. $M \in \mathbb{R}$ ve $M_1 = M - M_0$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğundan $n > N$ için $x_n > M_1$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır.

$\Rightarrow n > N$ iken $a_n + b_n > M_1 + M_0 = M \Rightarrow n > N$ iken $a_n + b_n > M$

olur ki bu $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ demektir.

(c) $M \in \mathbb{R}$ ve $M_1 = \frac{M}{M_0}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğundan

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ için $x_n > M_1$ yazılır. Hipotez gereği

her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > M_0$ olduğundan $n > N$ için $a_n b_n > M_1 . M_0 = M$

elde edilir. Bu ise $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$ demektir.

(b) $M \in \mathbb{R}$ ve $M_1 = \frac{M}{\alpha}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğundan

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ için $a_n > M_1$ dir.

$\alpha > 0$ olmak üzere $n > N$ iken $\alpha a_n > \alpha M_1 = M$ olur.

Bu ise $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = +\infty$ demektir.

---

d) $\varepsilon > 0$ verilsin. $(b_n)$ sınırlı olduğundan $|b_n| \leq M_0$ olacak şekilde bir $M_0$ sayısı vardır. $\frac{M_0}{M_1} < \varepsilon$ olacak şekilde $M_1 > 0$ seçilsin. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ olduğundan $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ için $a_n > M_1$ dir.

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{b_n}{x_n} \right| = \frac{|b_n|}{|x_n|} < \frac{M_0}{M_1} < \varepsilon$$

olur ki bu ise $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$ anlamına gelir.

**Sonuç 3.2.1.** $(a_n), (b_n)$ reel sayı dizileri, $\alpha, a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ise aşa. ifadenin sağ yanı $\infty - \infty$ dan farklı olması halinde

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = a . b \quad (0.\infty \text{ dan farklı})$$

dır.

Not: $n > N$ için $a_n < b_n$ iken $a < b$ olması gerekmez.

$a_n = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} = b_n$ olmasına karşın $a = b = 0$ dır. Yani

$0 \leq 0$ $\quad a \leq b$ olur.

### 3.2.1. Örnekler

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ dır: $0 < |\sin n| < 1$ olduğundan

$0 < \frac{|\sin n|}{n} < \frac{1}{n}$ olur. $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ olduğundan

Sıkıştırma Teoremine göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ dır.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n}{4n^2-1} = ?$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+7/n)}{n^2(4-1/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{7}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{1}{n^2})} = \frac{3}{4}$$

3) $a_n = \frac{n^2+n+3}{n^2}$ ise $(⟦a_n⟧)$ dizisinin limitini hesaplayınız.

$$⟦a_n⟧ = ⟦\frac{n^2+n+3}{n^2}⟧ = ⟦1+\frac{n+3}{n^2}⟧ = 1 + ⟦\frac{n+3}{n^2}⟧$$

$n > 3 \Rightarrow 0 < \frac{n+3}{n^2} < 1$ olduğundan $⟦\frac{n+3}{n^2}⟧ = 0$ dır.

$\lim\limits_{n\to\infty} ⟦a_n⟧ = 1 + 0 = 1$ dir.

4) $a_n = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}\cdot n}{2n-1}$ ise $(|a_n|)$ dizisinin limitini bulunuz.

$|a_n| = \frac{2n}{2n-1} \Rightarrow |a_n| = \frac{2}{2-\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ dır: $\frac{n!}{n^n} = \frac{1.2\cdots n}{n.n\cdots n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n} <$

$0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ old. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ dır.

6) $x_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

$$x_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6\cdot n^3}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{n}{n} = \frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 1.2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

## Teorem 3.2.4. Stolz Teoremi

$(u_n)$, $(v_n)$ $\mathbb{R}$ de iki dizi, $(v_n)$ artan, $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$ ve

$\alpha = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$ limiti mevcut ise o zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \alpha$$

dir.

<u>İspat:</u> $\alpha = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}$ olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ için $\forall n > N$

olduğunda
$$\alpha - \varepsilon < \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} < \alpha + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $(v_n)$ artan olduğundan $v_{n+1}-v_n > 0$ olup,

$n > N$ için, $(\alpha-\varepsilon).(v_{n+1}-v_n) < u_{n+1}-u_n < (\alpha+\varepsilon).(v_{n+1}-v_n)$

olur. Son ifade $n, n+1, n+2, \dots, m-1$ için yazılıp taraf tarafa toplanırsa, $(N < n < m)$

$$(\alpha-\varepsilon).(v_m-v_n) < u_m-u_n < (\alpha+\varepsilon).(v_m-v_n)$$

olur. Buradan

$$\alpha - \varepsilon < \frac{u_m-u_n}{v_m-v_n} < \alpha+\varepsilon \quad , \quad N < n < m$$

yazılır. $n$ sabit tutulup $m\to\infty$ için limit alınırsa

$$\alpha - \varepsilon < \frac{\dfrac{u_m}{v_m} - \dfrac{u_n}{v_m}}{1 - \dfrac{v_n}{v_m}} < \alpha + \varepsilon, \qquad N < n < m$$

bulunur. $n$ sabit tutulup $m\to\infty$ iken limit alınırsa,

$\lim_{m\to\infty} \dfrac{u_n}{v_m} = 0$, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{v_n}{v_m} = 0$ olacağından

$$\alpha = \lim_{m\to\infty} \frac{\dfrac{u_m}{v_m} - \dfrac{u_n}{v_m}}{1 - \dfrac{v_n}{v_m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{u_m}{v_m} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \alpha \text{ bulunur.}$$

**3.2.2. Sonuçlar.** 1) $a_n > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ var ise $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ var

olup, $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$ dir.

<u>İspat:</u> $u_n := \ln a_n$ olmak üzere Stolz Teoremi uygulanırsa;
$v_n := n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

yazılır.

Hipoteze göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mevcut olduğundan sağ taraf daki limit mevcuttur. Stolz Teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}-U_n}{V_{n+1}-V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n}$$

yazılır. Değerleri yerine yazılırsa,

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln a_n^{1/n} = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\right)$$

ln fonksiyonu birebir olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

bulunur. Bu ise gösterilmek istenendir.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mevcut ise $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 . x_2 \cdots x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ dir. $(x_n > 0)$

İspat. $a_n = x_1 . x_2 \cdots x_n$ olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ limiti mevcut olduğundan Sonuç 1. e göre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ dir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 . x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$ bulunur.

---

### 3.2.2. Örnekler.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ dir, gösteriniz.

$b_n = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$, $a_n = \frac{n^n}{n!}$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğu hatırlanırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

limiti mevcut olduğundan sonuç 1 e göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ dir.} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \text{ dir.}$$

2) $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ var ise $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dir:

$U_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, $V_n = n$ alınıp, Stolz Teoremi uygulanırsa

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}-U_n}{V_{n+1}-V_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mevcut olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

bulunmuş olur.

## 3.3. Monoton Diziler, $\mathbb{R}$ nin Tamlığı

**Tanım.** $\mathbb{R}$ de bir $(x_n)$ dizisi verilsin.

(1) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \leq x_{n+1}$) ise $(x_n)$ dizisine artan (azalmayan)

(2) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$) ise $(x_n)$ dizisine azalan (azalmayan)

dizi denir. Artan veya azalmayan diziye monoton dizi denir.

artan veya kesin artan, azalan veya kesin azalan ifadeleri de kullanılır.

Örneğin; $(a_k) = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}\right)$ dizisi artan ve üstten sınırlıdır;

- Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} + \frac{1}{(k+1)!} > \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = a_k$

olduğundan $a_{k+1} > a_k$ olup, $(a_k)$ artandır.

- Her $k \geq 2$ için $2^{k-1} < k!$ olduğu kullanılırsa;

$$a_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\Rightarrow a_k < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1/2} = 1 + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_k < 3 \text{ olup}$$

$(a_k)$ üstten sınırlıdır.

---

**Teorem 3.3.1.** (Monoton Yakınsaklık Teoremi, Monoton Dizi Özelliği)

1) Eğer $(a_n)$ reel sayı dizisi monoton artan ve üstten sınırlı ise yakınsaktır ve $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_n R(a_n)$ dir.

2) Eğer $(a_n)$ dizisi azalan ve alttan sınırlı ise yakınsaktır ve $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_n R(a_n)$ dir.

**İspat:** 1) $(a_n)$ $\mathbb{R}$ de artan ve üstten sınırlı olsun. O halde $R(a_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ kümesi üstten sınırlıdır. Tamlık Aksiyomuna göre $\sup R(a_n)$ mevcuttur. $c = \sup R(a_n)$ olsun. Supremumun karakteristik özelliğine göre her $\varepsilon > 0$ için

$$c - \varepsilon < a_N < c + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (veya $a_N \in R(a_n)$) vardır.

$(a_n)$ artan olduğundan $n > N$ için $a_n > a_N$ olup,

$\forall n > N$ olduğunda $c - \varepsilon < a_N < a_n < c + \varepsilon$ olur.

Böylece her $n > N$ olduğunda

$$c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon \iff |a_n - c| < \varepsilon$$

bulunur ki bu $(a_n)$ nin yakınsak ve limitinin $c$ olduğunu gösterir.

**Tanım. (Cauchy Dizisi)** $(x_n)$, $\mathbb{R}$ de bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $n,m>N$ olan her $n,m\in\mathbb{N}$ için

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $(x_n)$ ye $\mathbb{R}$ de bir Cauchy Dizisi denir.

**Örnek 3.3.1.1)** $x_n=\frac{3n-7}{9n+2}$ olmak üzere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir, gösterelim.

Keyfi $\varepsilon>0$ alalım. $n,m>N$ olduğunda $\left|\frac{3n-7}{9n+2}-\frac{3m-7}{9m+2}\right|<\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $N\in\mathbb{N}$ bulunmalı. $N$ tamsayısı $\frac{46}{27\varepsilon}$ olarak seçilirse (sayı tam değilse tam değeri alınır) $n,m>N$ için

$$\left|\frac{3n-7}{9n+2}-\frac{3m-7}{9m+2}\right|=\left|\frac{(27nm+6n-63m-14)-(27mn+6m-63n-14)}{(9n+2)(9m+2)}\right|$$

$$=\left|\frac{69m-69n}{81mn+18n+18m+4}\right|<\frac{69}{81}\cdot\frac{|m-n|}{m.n}\leq\frac{69}{81}\frac{m+n}{m.n}$$

$$=\frac{23}{27}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)<\frac{23}{27}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\right)=\frac{46}{27N}<\varepsilon$$

sağlandığından $(x_n)$ Cauchy dizisidir.

---

**2)** $x_n=(-1)^n.\frac{n+1}{n}$ olmak üzere tanımı kullanarak $(x_n)$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığını gösterelim:

Bir $\varepsilon>0$ için $m,n>N$ olduğunda $|x_n-x_m|\geq\varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$\varepsilon=2$ olsun. Herhangi $N\in\mathbb{N}$ için ve $n=2N$, $m=2N+1$ olsun. $n,m>N$ sağlanır. Bu durumda

$$|x_n-x_m|=\left|(-1)^n.\frac{n+1}{n}-(-1)^m.\frac{m+1}{m}\right|$$

$$=\left|(-1)^{2N}.\frac{2N+1}{2N}-(-1)^{2N+1}.\frac{(2N+1)+1}{2N+1}\right|$$

$$=\left|\frac{2N+1}{2N}+\frac{(2N+1)+1}{2N+1}\right|=\left|1+\frac{1}{2N}+1+\frac{1}{2N+1}\right|$$

$$=2+\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N+1}>2=\varepsilon$$

gerçeklendiğinden $(x_n)$ dizisi Cauchy dizisi değildir.

3.3.2. Teorem.

1) $\mathbb{R}$ de yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.

2) $\mathbb{R}$ de her Cauchy dizisi sınırlıdır.

3) $\mathbb{R}$ deki her Cauchy dizisi $\mathbb{R}$ de yakınsaktır.

( 3. şık, $\mathbb{R}$ de diziler için Cauchy yakınsaklık kriteri olarak bilinir ve $\mathbb{R}$ nin tam uzay olduğunu söyler. İspatı Analiz III derslerinde yapılacaktır.

İspat: 1) $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ olsun. Yakınsaklık tanımına göre, verilen her $\varepsilon > 0$ için, $n > N$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n - a| < \varepsilon/2$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\forall n, m > N$ için de

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

yazılır. Bu ise $(a_n)$ nin Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

2) $(a_n)$ Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon = 1$ sayısına karşılık $\exists N(1) = N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m > N$ için $|a_m - a_n| < 1$ dir.

$m = N+1$ alınırsa, $|a_n - a_{N+1}| < 1$ yazılır. Buradan $\forall n > N$ için

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$$

olur. $M = \text{maks}\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$ alınırsa ~~$\forall n > N$ için~~ her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| < M \Rightarrow (a_n)$ sınırlı olur.

---

3.3.2. Örnek: 1) $a_n = \left(\frac{\cos 1!}{1.2} + \frac{\cos 2!}{2.3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n.(n+1)}\right)$ ve $b_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$ olmak üzere $(a_n)$, $(b_n)$ dizilerinin yakınsak olduğunu Cauchy kriterini kullanarak gösteriniz.

2) $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ olmak üzere $(c_n)$ dizisinin yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm: 1) $\varepsilon > 0$ verilsin. $m > n > N$ için

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1).(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m!}{m.(m+1)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{m.(m+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right).$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) < \varepsilon$$

yapılabilir. $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}\right.$ olduğundan $\left.\right)$

$(a_n)$ $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olur. Her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $(a_n)$ $\mathbb{R}$ de yakınsaktır.

. Benzer şekilde $(b_n)$ nin $\mathbb{R}$ de yakınsak olduğu gösterilir.

Çözüm 2. $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ olsun. $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ için

$$|c_{n+p} - c_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| > \frac{p}{n+p}$$ olur. $p=n$ alınırsa

$|c_{n+p} - c_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$ olur ki $(c_n)$ Cauchy dizisi değildir.

Dolayısıyla $(c_n)$ yakınsak değildir.

Not: $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ özelliğindeki her $(x_n)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması gerekmez. Örneğin $x_n = \ln n$ olsun. logaritmanın özelliklerinden

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \ln 1 = 0 \quad (n\to\infty)$$

dır fakat $(x_n)$ yakınsak olmadığından Cauchy dizisi değildir.

$\lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ dır.

3.) $|a| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ dır.

4) $a > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ dır.

5) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ dir.

Bu üç soru uygulama derslerinde yapılacaktır.